

نکات کلیدی بحث عبارات های جبری

ریاضی ۱

۱: اتحاد های جبری

اتحاد های مربع دو جمله ای

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{مربع مجموع دو جمله}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{مربع تفاضل دو جمله}$$

اتحاد مزدوج (حاصل ضرب مجموع دو جمله در تفاضل همان دو جمله)

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

اتحاد جمله ی مشترک

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

اتحاد های مجموع یا تفاضل دو مکعب (چاق و لاغر)

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 \quad \text{اتحاد مجموع دو مکعب}$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \quad \text{اتحاد تفاضل دو مکعب}$$

اتحاد های مکعب دو جمله ای

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \text{اتحاد مکعب مجموع دو جمله}$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad \text{اتحاد مکعب تفاضل دو جمله}$$

اتحاد های فرعی

علاوه بر اتحاد های فوق اتحاد های دیگری نیز از اهمیت بسیاری برخوردارند. مهمترین این اتحادها عبارتند از:

$$۱) a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

$$۴) (a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

$$۲) a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$$

$$۵) a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

$$۳) (a + b)^2 + (a - b)^2 = 2a^2 + 2b^2$$

$$۶) a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$$

اتحاد مربع مجموع سه جمله

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

اتحاد اوپلر

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz \quad \text{اگر } x + y + z = 0 \text{ ثابت کنید که}$$

۲: تجزیهی چند جمله ای ها

در تجزیهی چند جمله ای ها روش های مختلفی وجود دارد. فاکتورگیری و استفاده از اتحاد، مهمترین این روش ها بیان می شود.

چند نکته در تجزیهی چند جمله ای ها

(۱) برای تجزیهی یک چند جمله ای ابتدا باید روش فاکتور گیری را بررسی کرد. سپس به روش های دیگر پرداخت.

مثال: برای تجزیهی عبارت های زیر قبل از اتحاد از فاکتور گیری استفاده شده است.

$$۱) ۸x^3 - 2x = 2x(4x^2 - 1) = 2x(2x - 1)(2x + 1)$$

$$۲) ۵۰x^3 + ۶۰x^2 + ۱۸x = 2x(25x^2 + 30x + 9) = 2x(5x + 3)^2$$

$$۳) ۱۶x^4 - 2x = 2x(8x^3 - 1) = 2x(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$$

(۲) گاهی اوقات لازم است قبل از تجزیهی یک عبارت ، جملات آن را دسته بندی کرد.

مثال: برای تجزیهی عبارت های زیر قبل از هر عملی جملات را دسته بندی می کنیم.

الف:

$$2a^2 + a + 2ab + b = (2a^2 + a) + (2ab + b)$$

$$= a(2a + 1) + b(2a + 1) = (2a + 1)(a + b)$$

ب:

$$۱ - a^2 + 2ab - b^2 = ۱ + (-a^2 + 2ab - b^2) = ۱ - (a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= ۱ - (a - b)^2 = [۱ - (a - b)][۱ + (a - b)] = (۱ - a + b)(۱ + a - b)$$

(۳) گاهی برای تجزیهی یک چند جمله ای لازم است جمله یا جمله هایی از آن را تفکیک کرد.

مثال: برای تجزیهی عبارت $3x^2 + 7x + 2$ به صورت زیر عمل می کنیم.

$$3x^2 + 7x + 2 = 3x^2 + \overbrace{6x + x}^{7x} + 2 = (3x^2 + 6x) + (x + 2)$$

$$= 3x(x + 2) + (x + 2) = (x + 2)(3x + 1)$$

مثال: برای تجزیهی عبارت $x^3 + x - 10$ به صورت زیر عمل می کنیم.

$$x^3 + x - 10 = x^3 + x - 2 - 8 = (x^3 - 8) + (x - 2)$$

$$= (x - 2)(x^2 + 2x + 4) + (x - 2)$$

$$= (x - 2)(x^2 + 2x + 4 + 1) = (x - 2)(x^2 + 2x + 5)$$

۴) گاهی برای تجزیه‌ی یک چند جمله‌ای لازم است جمله یا جمله‌هایی را به آن عبارت افزود و کم کرد.

مثال: برای تجزیه‌ی عبارت $x^4 + 2x^2y^2 + 9y^4$ به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^2y^2 + 9y^4 &= x^4 + 6x^2y^2 + 9y^4 - 4x^2y^2 \\ &= (x^4 + 6x^2y^2 + 9y^4) - 4x^2y^2 \\ &= (x^2 + 3y^2)^2 - 4x^2y^2 \\ &= [(x^2 + 3y^2) - 2xy][(x^2 + 3y^2) + 2xy] \\ &= (x^2 + 3y^2 - 2xy)(x^2 + 3y^2 + 2xy) \end{aligned}$$

۵) برای تجزیه‌ی یک سه جمله‌ای درجه‌ی دوّم که در آن ضریب جمله‌ی درجه‌ی دوّم آن برابر یک نباشد. می‌توان به روش زیر نیز عمل کرد. که در ضمن مثال توضیح داده می‌شود.

مثال: برای تجزیه‌ی عبارت $3x^2 + 7x + 2$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم.
الف: عبارت داده شده را برابر یک حرف مانند P قرار می‌دهیم.

$$P = 3x^2 + 7x + 2$$

ب: دو طرف تساوی را در ضریب جمله‌ی درجه‌ی دوّم یعنی x^2 ضرب می‌کنیم.

$$P = 3x^2 + 7x + 2 \xrightarrow{\times 3} 3P = 9x^2 + 21x + 6$$

ج: مشاهده می‌شود که یک جمله در تساوی جدید مربع است. جذر آن را محاسبه می‌کنیم و جمله‌ی درجه‌ی یک را نیز به صورت مضربی از آن می‌نویسیم.

$$3P = (3x)^2 + 7(3x) + 6$$

د: مشابه اتحاد جمله‌ی مشترک دو عدد پیدا می‌کنیم که مجموع آنها ۷ و ضرب آنها ۶ باشد.

$$3P = (3x)^2 + \underset{6+1}{7}(3x) + \underset{6 \times 1}{6} \rightarrow 3P = (3x + 6)(3x + 1)$$

ه: در نهایت مضرب ۳ را از دو طرف تساوی حذف می‌کنیم.

$$3P = 3(x + 2)(3x + 1) \rightarrow P = (x + 2)(3x + 1)$$

توجه: این روش را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد، که به دلیل سادگی و سریع بودن آن به **روش**

کوتاه موسوم است. در اینجا این روش را جهت تفهیم بهتر به صورت چند مرحله‌ای بیان می‌کنم.

مرحله‌ی **اول:** برای سه جمله‌ای داده شده را بیان می‌کنیم.

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{a}(ax + \dots)(ax + \dots)$$

مرحله‌ی **دوّم:** دو عدد پیدا می‌کنیم که مجموع آنها b و حاصل ضرب آنها ac باشد.

مرحله‌ی **سوّم:** این دو عدد را به جای نقطه چین‌ها قرار می‌دهیم.

مرحله‌ی **چهارم:** در صورت لزوم یک یا هر دو پرانتز از پرانتزهای بدست آمده را به روش فاکتورگیری

تجزیه می‌کنیم و سپس با a ساده می‌کنیم.

مثال : برای تجزیه‌ی سه جمله‌ی $6x^2 - 7x - 5$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

$$6x^2 - 7x - 5 = \frac{1}{6}(6x + \dots)(6x + \dots)$$

اکنون دو عدد پیدا می‌کنیم که مجموع آنها -7 و حاصل ضرب آنها $6 \times (-5) = -30$ باشد. واضح است که این دو عدد -10 و 3 می‌باشند. پس می‌توان نوشت.

$$\begin{aligned} 6x^2 - 7x - 5 &= \frac{1}{6}(6x - 10)(6x + 3) = \frac{1}{6} \times 2(3x - 5) \times 3(2x + 1) \\ &= (3x - 5)(2x + 1) \end{aligned}$$

۳ : محاسبه‌ی بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک چند جمله‌ای ها

برای تعیین بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک دو یا چند، چند جمله‌ای، ابتدا هر یک از آنها را به عوامل اول^۱ تجزیه می‌کنیم. سپس قاعده‌های زیر را بکار می‌گیریم .

بزرگترین مقسوم علیه مشترک با حاصل ضرب عوامل مشترک با توان کمتر ، برابر است.
کوچکترین مضرب مشترک با حاصل ضرب عوامل مشترک و غیر مشترک با توان بیشتر ، برابر است.

۴ : عبارت های گویا

هر عبارت به صورت $\frac{A}{B}$ که در آن A و B دو چند جمله‌ای بوده و B مخالف صفر باشد، را یک عبارت گویا می‌نامند.

دامنه‌ی یک عبارت گویا

دامنه‌ی یک عبارت گویا مجموعه‌ی همه‌ی مقادیر حقیقی است که به ازای آنها مخرج صفر نشود.

به عبارت دیگر دامنه‌ی عبارت $\frac{A}{B}$ می‌شود. $D = R - \{ \text{ریشه‌های مخرج} \}$

ساده کردن عبارت گویا

برای ساده کردن یک عبارت گویا، صورت و مخرج آن را در صورت امکان تجزیه نموده و عامل های مشترک را از صورت و مخرج حذف می‌کنیم.

جمع و تفریق عبارت های گویا

برای جمع و تفریق دو عبارت گویا دو حالت زیر وجود دارد.

الف : اگر مخرج ها مساوی باشند، در این حالت، صورت ها را با هم جمع یا از هم کم می‌کنیم.

ب : اگر مخرج ها مساوی نباشند، در این حالت، ابتدا مخرج ها را با توجه به کوچکترین مضرب مشترک آنها ، مساوی می‌کنیم.

^۱ . منظور از عامل های اول یک چند جمله‌ای، عواملی است که پس از تجزیه‌ی یک عبارت بدست می‌آیند.

ضرب و تقسیم عبارت های گویا

برای ضرب دو عبارت گویا ابتدا در صورت امکان آنها را ساده می کنیم و سپس صورت ها را در همدیگر و همچنین مخرج ها را در هم ضرب می کنیم.

برای تقسیم دو عبارت گویا، کافی است عبارت اول را در معکوس عبارت دوم ضرب کنیم.

۵: گویا کردن مخرج کسره های گنگ

منظور از گویا کردن مخرج یک کسر گنگ این است که با انجام عملیاتی، مخرج را از حالت رادیکالی خارج کنیم.

برای گویا کردن مخرج کسره های گنگ می توان موارد زیر را در نظر گرفت:

الف: برای گویا کردن مخرج کسرهایی که مخرج آنها دارای یک جمله بوده و شامل رادیکال با فرجه ی ۲ باشند، باید صورت و مخرج را در رادیکال مخرج ضرب کنید.

ب: برای گویا کردن مخرج کسرهایی که مخرج آنها دارای یک جمله بوده و شامل رادیکالی به صورت $\sqrt[m]{a^n}$ باشند. باید صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[m]{a^{m-n}}$ ضرب کنید. ($m > n$)

ج: برای گویا کردن مخرج کسرهایی که مخرج آنها دوجمله ای بوده و شامل رادیکال با فرجه ی زوج باشند، باید صورت و مخرج را هر چند بار که لازم باشد، در مزدوج مخرج ضرب کنید.

د: برای گویا کردن مخرج کسرهایی که مخرج آنها دارای دو یا سه جمله بوده و شامل رادیکال با فرجه ی ۳ باشند، از اتحاد های زیر استفاده نمایید.

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

اگر در مخرج پراتنز کوچک باشد، صورت و مخرج آن را در پراتنز بزرگ و اگر در مخرج پراتنز بزرگ باشد، صورت و مخرج آن را در پراتنز کوچک ضرب کنید.

۶: دو اصل کارآمد در جبر

اصل ضرب دو عدد

اگر حاصل ضرب دو عدد صفر باشد، حداقل یکی از آنها صفر است. بع عبارت دیگر

$$A \times B = 0 \rightarrow A = 0 \quad \text{or} \quad B = 0$$

اصل مجموع مربعات

اگر مجموع مربعات دو عدد برابر صفر باشد، باید هر یک از آن دو عدد برابر صفر باشند. به عبارت دیگر

$$A^2 + B^2 = 0 \rightarrow A = 0 \quad \text{and} \quad B = 0$$

دانش آموز محترم:

از دیروز بیاموز، برای امروز زندگی کن و امید به فردا داشته باش

موفق باشید.

تهیه کننده : جابر عامری ، دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی
کانال تلگرامی: @mathameri سایت : www.mathtower.ir